352. 抽象空間ノ測度ニ就テ

寺 阪 英 孝（阪大）

Topologischer Raum R ニ Inhalt $m(O)$ ガ與ヘラレタ offene Menge ノ System $\mathfrak{O}=\{O\}$ ガアリ、次ノ諸性質ヲ持ツモノトスル。（O ヲ $\mathfrak{O}$ 集合トイフ）

I、任意ノ点 $x \in R$, 近傍 $V(x)$, 正數 ε ニ對シ

$$x \subset O \subset V(x), \quad 0 < m(O) < \varepsilon$$

ナル如キ O ガ存在スル。

II. $O \subset O_1 + O_2 + \cdots\cdots + O_n$

ナラバ

$$m(O) \leqq m(O_1) + \cdots\cdots + m(O_n)$$

III. $O \supset O_1 + \cdots\cdots + O_n, \quad O_i, O_j = 0 \ (i \neq j)$

ナラバ

$$m(O) \geqq m(O_1) + \cdots\cdots + m(O_n)$$

I, II, III ノ外, O ノ周ノ條件トシテ

IV. O ノ周 $B(O)$ ハ，任意ノ正數 ε ニ對シ

$$\sum_{i=1}^{n} m(O_i) < \varepsilon$$

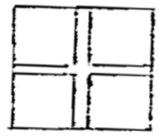
ナル如キ $O_1 \cdots\cdots O_n$ デ蔽ハレル。

換言スレバ $B(O)$ ノ map ハ 0 ニ等シイ、ト云フベキ條件ヲ入レル。

コノ $\{O\}$ ヲ用ヒテ一般ニコノ R ノ offene Menge ノ Maß ヲ定義スルタメニ，次ノヤウナ方法ヲ用ヒタトシヨウ。即チ

定義. 與ヘラレタ開集合 G 内ニ互ニ共有点ノナイ Ω 集合 $O_1, O_2, \cdots\cdots$ ヲ有限個或ハ可附番個トリ、$\max_n m(O_n) \to 0$ ノ時ノ $\overline{\lim}\sum m(O_n)$ ヲ以テ G ノ Maß トスル。

コウスルト I—IV ダケノ條件デハ不都合デアルコトガ直グ分ル。例ヘバ辺長 $\frac{1}{n}$ ノ正方形ノ四隅カラ合同ノ正方形ヲ切取ツタ殘リノ十字形デ面積ガ $\frac{1}{4n^4}$ ニ等シイモノヲ一般ニ $O(n)$ デ表ハセバ辺長 N（N ハ正ノ整数）ノ正方形内ニ入リ得ル $O_{(n)}$ ノ数ハ極大雑パニ見積ツテモ $(2nN)^2$ ヨリ小サイ故、ソノ Inhalt ノ総和ハ $<\frac{N^2}{n^2}$，故ニ $n>k$ ナル $O_{(n)}$ ニツイテハ上述ノ



$\frac{1}{n}$

$$\sum m(O_n) < \sum_{n=k}^{\infty}\frac{N^2}{n^2}$$

ヨツテ、コノ正方形ノ Maß ハコノ $\overline{\lim}$ ダカラ 0 ニナル。従ツテ平面ノドノ offene Menge ノ Maß モコノ計方デハ 0 トナル。

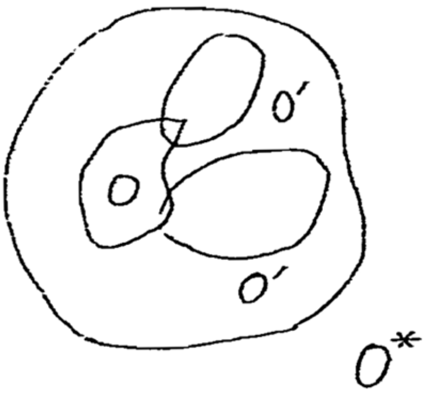
Maß ノ定義ハ上述通リトシ，$\{O\}$ ニドンナ條件ヲ加ヘレバ不都合ガ起ラナイダラウカ。コレニ對スル答トシテ不十分ナガラ次ノ一ツヲ與ヘルコトガ出來ル。

V. 任意ノ Ω 集合 O ニ對シ、$O.O' \neq 0$ デ且ツ

$$m(O') \leqq 2m(O)$$

ナル凡テノ O' ノ Summe $\Sigma O'$ ヲ含ミ $m(O^*) \leqq k \cdot m(O)$ (k 一定数) ナル如キ Ω 集合 O^* ガ存在スル (十分小サナ m ノ値ニツイテダケデモ ヨロシイ)

I —— V ヲ用ヒ次ノ定理ヲ証明スル。



定理 1. O ヲ Ω 集合トシ, O ニ含マレル Ω 集合ノ Inhalt ノ上限ヲ m_1 トシ, $m(O_1) > \frac{m_1}{2}$ ナル $O_1 \subset O$ ヲトル。次ニ $O - O_1$ ニ含マレル Ω 集合ノ Inhalt ノ上限ヲ m_2 トシ, $m(O_2) > \frac{m^2}{2}$ ナル $O_2 \subset O - O_1$ ヲトル、以下同様ニシテ $O_3, \cdots\cdots$ ヲ走ルトキ

$$m(O) = \sum_{i=1}^{\infty} m(O_i)$$

(証明) $n \geqq N$ (N ハ任意ノ自然数) ニ對シ O_n^* ヲ作リ, 又別ニ $O_1, \cdots\cdots, O_{N-1}$ ノ周ヲ IV ニ従ッテ Inhalt ノ総和ガ $< \varepsilon$ ナル Ω 集合 $O'_1, \cdots\cdots O'_\lambda$ デ蔽フ、サウスルト

$$(*) \quad O \subset (O_1 + \cdots\cdots + O_{N-1}) + (O'_1 + \cdots\cdots + O'_\lambda) + \sum_{n \geqq N} O_n^*$$

トナル。何者 $x \subset O$ ガ $(O_1 + \cdots + O_{N-1})$ 及ビ $(O'_1 + \cdots + O'_\lambda)$ ニ含マレヌナラバ, x ヲ含ミ $O - (O_1 + \cdots + O_{N-1})$

ニ含マレル Ω 集合ノ Inhalt ノ上限ヲ m トシ，コノ集合ノ中デ Inhalt $> \frac{m}{2}$ ナルーツノ O_x ヲ考ヘル、今 O_N, O_{N+1}, ……… ノ中デ最初ニ O_x ト共有点ヲモツモノヲ O_λ $(\lambda \geqq N)$ トスレバ $O_\lambda^* \supset O_x \supset x$ ナルコトが云ヘル。何者 $O_\lambda^* \not\supset O_x$ ダトスレバ O_λ^* ノ性質 V ニヨリ $m(O_x) > 2m(O_\lambda)$ 従ッテ（O_λ ハ $m(O_\lambda) > \frac{m_\lambda}{2}$ ナル故）

$$m(O_\lambda) > m_\lambda.$$

然ルニ m_λ ハ $O-(O_1+\cdots\cdots+O_{\lambda-1})$ ニ含マレル Ω 集合ノ Inhalt ノ上限デアツタ筈故 $m(O_x) \leqq m_\lambda$、矛盾. 従ッテ $O^* \supset O_x \supset x$. ヨツテ(*)が成立スル。コレヨリ

$$\sum_{i=1}^{\infty} m(O_i) \leqq m(O) < \sum_{i=1}^{N-1} m(O_i) + \varepsilon + k\sum_{i=N}^{\infty} m(O_i)$$

$N \to \infty$ トスレバ

$$\sum_{i=1}^{\infty} m(O_i) = m(O). \text{———}$$

定理2. $O_i \cdot O_j = 0\ (i \neq j)$ ナルトキ

$$\sum_{i=1}^{n} O_i \subset \sum_{i=1}^{m} O_i' \quad \text{ナラバ} \quad \sum_{i=1}^{n} m(O_i) \geqq \sum_{i=1}^{m} m(O_i')$$

（コレハ II ノ性質ノ擴張デアル）

（証明）ーツノ i ニ對シ O_i が O_k' $(k=1, \cdots\cdots m)$ ノドレニモ含マレテヰナイ場合デモ任意ノ $x \subset O_i$ ハ O_k' ノドレカニ含マレルカラ、ソノーツヲ O_k' トシ，x ヲ含ム Ω 集

合ノ中デ $\subset O_i \cdot O'_k$ ノモノ全部ヲ x ニ對應セシメル、コレヲ各 $x \subset O_i$ ニツイテ行ヘバ O ヲ蔽フ $\mathfrak{L}'$ 集合ガ得ラレル、コノ $\mathfrak{L}'$ 集合ダケデ定理1ノ方法ヲ用キレバ，O_i ニ含マレ互ニ共有点ノナイ有限個ノ $\mathfrak{L}'$ 集合デ，*Inhalt* ノ和ガ $m(O_i)$ ニ極ク近イモノガ得ラレル．（$\mathfrak{L}'$ ハ▽ヲ満足シナイカモ知レナイガソレデモ構ハナイ）

各 O_i ニツキ之レヲ行ツテ得ラレタ $\mathfrak{L}$ 集合ヲ O''_1, ---------, O''_p トスレバ $\{O''\}$ ハ O'_k ノイヅレカニ含マレ $\sum m(O'')$ ハ $\sum m(O_i)$ ニゴク近イ O''_1 ------- O''_p 中 O'_1 ニ含マレルモノヲマトメ、次ニ残リノ中デ O'_2 ニ含マレルモノヲマトメ、以下同様ニシテ O'' ヲ分類スレバ，II ニヨリ

$$\sum_{i=1}^{p} m(O''_i) \leqq \sum_{i=1}^{m} m(O'_i)$$

云々．――――

開集合 G ニツキ定理1ノ方法ニヨツテ O_1, O_2 ------- ヲ定メレバ，$\sum_{i=1}^{\infty} m(O_i)$ ガ有限ナル場合ハコノ値ヲ $m(G)$ トスルト，$m(G)$ ハ *Maß* ノ定義（上述）ニヨル値ト一致シ、G ガ $\mathfrak{L}$ 集合ナルトキハ上述ノ *Inhalt* ニ等シク，又 $\mathfrak{L}$ 集合同様 II, III ノ性質ヲ有スルコトガ分ル。